Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024

Proba E. c) Matematică *M_pedagogic*

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $a = \log_3 4 - 2\log_3 6$ este număr întreg.

5p **2.** Să se determine suma soluțiilor întregi ale inecuației $3x^2 - 5x - 2 \le 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{5x+2} = 9^{3x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifre nenule.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C, astfel încât $A(1,3)$, $B(2,5)$ și $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie triunghiul ABC în care se cunosc AC = 8cm, BC = 15cm, iar măsura unghiului C este de 30^o. Arătați că aria triunghiului ABC este de $30cm^2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 3xy - 3x - 3y + 4$.

5p **1.** Arătați că $a \circ 1 = 1$oricare ar fi numărul real a.

5p **2.** Să se arate că $x \circ y = 3(x-1)(y-1) + 1$.

5p **3.** Arătați că $e = \frac{4}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție ”∘”.

5p **4.** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi x, y, z numere reale.

5p **5.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale $3^x \circ (3^x + 2) = 25$.

5p **6.** Calculați $\frac{1}{17} \circ \frac{2}{17} \circ \frac{3}{17} \circ ...... \circ \frac{2024}{17}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea
$G = \left\{ X(a) \in M_2(\mathbb{R}) / X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \right\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **1.** Arătați că $\det X(2) = 7$.

5p **2.** Arătați că $X(1) + X(4) = X(2) + X(3)$.

5p **3.** Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in G$.

5p **4.** Demonstrați că $det\, X(a) \neq 0$, oricare ar fi $X(a) \in G$.

5p **5.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care $X(a) \cdot X(a) = X(0)$, unde $X(a) \in G$.

5p **6.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care $\det(X(a) + aI_2) \le 0$, unde $X(a) \in G$.

Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024
Proba E. c) Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE *Simulare*

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare
• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a = log_3 4 - log_3 36 =$ $= log_3 \frac{4}{36} = log_3 \frac{1}{9} = -2 \in \mathbb{Z}$	**2p** **3p**
2.	$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$ $3x^2 - 5x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 2\right]$, dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$. Atunci suma soluțiilor întregi este 3	**2p** **3p**
3.	$9^{3x} = 3^{6x}$ $5x + 2 = 6x \Rightarrow x = 2$	**2p** **3p**
4.	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; sunt 9 cifre nenule Atunci $A_9^3 = 504$	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (x_C - 1)\vec{i} + (y_C - 3)\vec{j}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow x_C - 1 = 2\,, y_C - 3 = 4 \Rightarrow C(3, 7)$	**2p** **3p**
6.	Construind $AD \perp BC, D \in BC$, în triunghiul dreptunghic ACD, unghiul C are 30°, așa că AD = 4cm. Atunci aria triunghiului ABC este $A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{15 \cdot 4}{2} = 30$ cm²	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1)	$a \circ 1 = 3 \cdot a \cdot 1 - 3 \cdot a - 3 \cdot 1 + 4 =$ $= 3a - 3a - 3 + 4 = 1$	**2p** **3p**
2)	$3xy - 3x - 3y + 4 = 3(x - 1)(y - 1) + 1$ $3xy - 3x - 3y + 4 = 3(xy - x - y + 1) + 1$ $3xy - 3x - 3y + 4 = 3xy - 3x - 3y + 3 + 1$ $3xy - 3x - 3y + 4 = 3xy - 3x - 3y + 4,$ pentru orice numere reale *x* şi *y*.	**2p** **3p**
3)	$x \circ \frac{4}{3} = 3(x - 1)\left(\frac{4}{3} - 1\right) + 1 = 3(x - 1)\frac{1}{3} + 1 = x - 1 + 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{4}{3} \circ x = 3\left(\frac{4}{3} - 1\right)(x - 1) + 1 = 3 \cdot \frac{1}{3}(x - 1) = x - 1 + 1 = x\,, \forall x \in \mathbb{R}$	**2p** **2p**

	$x \circ \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \circ x = x$, pentru orice număr real x, așadar $e = \frac{4}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție pe $\mathbb{R}$	1p
4)	$(x \circ y) \circ z = 9(x-1)(y-1)(z-1)+1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $x \circ (y \circ z) = 9(x-1)(y-1)(z-1)+1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice numere reale x,y,z, deci legea de compoziţie este asociativă pe $\mathbb{R}$.	2p 2p 1p
5)	$3(3^x-1)(3^x+2-1)+1=25$ $(3^x-1)(3^x+1)=8 \Rightarrow 3^{2x}-1=8 \Rightarrow 3^{2x}=9$ $x=1$	2p 2p 1p
6)	Se determină elementul absorbant al legii de compoziție $a=1$, adică x$\circ 1 = 1 \circ x = 1$, pentru orice număr real x $\Rightarrow \frac{1}{17} \circ \frac{2}{17} \circ \frac{3}{17} \circ \ldots\ldots \circ \frac{2024}{17} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1)	$X(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $detX(2) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15-8=7$	3p 2p
2)	$X(1)+X(4) = I_2 + A + I_2 + 4A = 2I_2 + 5A$ $X(2)+X(3) = I_2 + 2A + I_2 + 3A = 2I_2 + 5A$ $\Rightarrow$ egalitatea este arătată.	2p 2p 1p
3)	$(I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b+3ab)A$ $I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + aA + bA + 3abA$ $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 3A$ $\Rightarrow abA^2 = 3abA$, de unde rezultă egalitatea cerută.	3p 2p
4)	$X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ 2a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow det(X(a)) = 1+3a$ $a \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow 1+3a \neq 0$	3p 2p
5)	$X(a) \cdot X(a) = X(0) \Leftrightarrow 3a^2 + 2a = 0$ $a \in \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$	3p 2p
6)	$X(a) + aI_2 = \begin{pmatrix} 1+3a & a \\ 2a & 1+2a \end{pmatrix}$ $\det(X(a)+aI_2) \leq 0 \Leftrightarrow 4a^2+5a+1 \leq 0$ $a \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right] - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$	2p 2p 1p